

数学腕だめしコンテスト解答例

問1 3桁の整数として277(桐生市の市外局番の後の3桁)を選んだとします. ひっくり返して772, 差をとって $772-277=495$. もう一度ひっくり返して, 今度は和をとると, $594+495=1089$.

問2の解答に進む前に基本事項です. 3桁の整数が「X Y Z」と書かれたとします. Xが100の位, Yが10の位, Zが1の位で, Xは1以上9以下の整数, Y, Zは0以上9以下の整数です. このとき, この3桁の整数を式で表すと, $100X + 10Y + Z$ となります. また, 100以上999以下の整数は必ず $100X + 10Y + Z$ (Xは1以上9以下の整数, Y, Zは0以上9以下の整数)の形で表されて, Xが100の位, Yが10の位, Zが1の位の数となります.

では問2, 桐子の最後の会話を証明しましょう. 最初の3桁の整数を「a b c」とします. 基本事項から「a b c」= $100a + 10b + c$ です. 「a b c」をひっくり返した「c b a」は「c b a」= $100c + 10b + a$ となります. これら2つの整数の差をとる, つまり大きい方から小さい方を引き算します. ここで「1の位の数と100の位の数の差が2以上」の条件を思い出すと, $a > c + 1$ または $c > a + 1$ のどちらかが成立します. ではまず,

$a > c + 1 \cdots (*)$ を仮定しましょう. このときは, ひっくり返す前の整数「a b c」がひっくり返した後の整数「c b a」よりも大きく,

$「a b c」 - 「c b a」 = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 100(a-c) + c-a$ となります.

さて, 差をとってできた新しい3桁の整数は, 最初の基本事項により, 100の位が $a-c$, 10の位が0で1の位が $c-a$ となりそうですが, ここで注意して下さい. 1の位の $c-a$ は仮定(*)から負になってしまいます. 各位の数字は0以上9以下の整数です. そこで小学校の算数以来, 誰もが使っている「引き算の繰り下がり」を思い出して下さい. 1の位が負になりそうになったら, 左隣の10の位から10を借りてきます. ところが10の位も今は0です. そこで, まずは10の位が左隣の100の位から $100=10 \times 10$ を借りてきます. つまり,

$$「a b c」 - 「c b a」 = 100(a-c-1) + 10 \times 10 + c-a.$$

次に1の位が10の位から10を借りてきます. つまり,

$$「a b c」 - 「c b a」 = 100(a-c-1) + 10 \times \underline{9} + \underline{c-a+10} \cdots (**)$$

これで, 差をとってできた新しい3桁の整数の1の位が $\underline{c-a+10}$ に, よって正となりました. 10の位は $\underline{9}$, 100の位の $\underline{a-c-1}$ は仮定(*)より正です. (このような巧妙な計算を皆さんは, 数字の入った実際の筆算で, ほとんど意識せずにこなしているのです.)

ここまで来ればあと少しです．この3桁の数（**）をひっくり返すと

$100(c-a+10) + 10 \times 9 + a-c-1$ となります．最後に（**）との和をとって

$$\begin{aligned} 100(c-a+10) + 10 \times 9 + a-c-1 &+ 100(a-c-1) + 10 \times 9 + c-a+10 \\ = 100 \times 9 + 10 \times 18 + 9 &= 1089 \end{aligned}$$

となって，証明完了です．

なお，仮定（*）のかわりに $c > a + 1$ を仮定した場合，ひっくり返した「c b a」が最初の3桁の整数「a b c」よりも大きいので，差は「c b a」-「a b c」= $100(c-a) + a-c$ となります．以下，aとcを入れかえて同様な証明が成り立ちます．

他の証明（概略）「a b c」-「c b a」= $100(a-c) + c-a = 99(a-c)$ ．仮定（*）ではa-cは2以上9以下．したがって $99 \times 2, 99 \times 3, \dots, 99 \times 9$ の計8個の数について，それぞれひっくり返したものを加えて1089となることを確かめる証明も可です．

さて，この問題は1089問題とか言われて，外国ではそれなりに有名です．1089をタイトルにもつ数学書（洋書）もあります（<https://academic.oup.com/book/53963>）．今回は3桁の整数から始めましたが，4桁の整数から始めて，同様な操作を行う（ひっくり返して，差をとって，またひっくり返して和をとる）とどうなるか？ 4桁の整数から始めた場合も，各位の数の大小関係で場合分けをすることで，一定のルールが見つかります．ともかく，皆さんに考えてもらった問題は，いろいろと拡張もできて奥が深いといえます．ぜひ，4桁の場合も楽しんで考えてみて下さい．

数学腕だめしコンテストに応募してくれた皆さんへ．たくさんの御応募ありがとうございました．その中で，文字式を使いながらも繰り返し下がり気が付いて，問題の本質を理解した答案もかなり見受けられました．一方，自分ではわかっているつもりでも，その内容を相手に的確に伝えることが重要です．自分で論理を組み立てる力とともに，それを発信できるコミュニケーション力，その繰り返しは今後，皆さんの数学の腕を磨いていくものと信じています．

次ページに，文字を使った筆算で問2を試した例をあげます（ただし $a > c + 1$ の場合）．なぜこの筆算が正しいかというと，上で示した解答が拠り所となります．

3 桁の整数「 $a b c$ 」 ただし $a > c+1$

ひっくり返して差をとると、

$$\begin{array}{r} a \quad b \quad c \\ - c \quad b \quad a \\ \hline \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{r} a \quad b-1 \quad c \\ - c \quad b \quad a \\ \hline 10-a+c \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{r} a-1 \quad b-1 \quad c \\ - c \quad b \quad a \\ \hline 9 \quad 10-a+c \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{r} a-1 \quad b-1 \quad c \\ - c \quad b \quad a \\ \hline a-1-c \quad 9 \quad 10-a+c \end{array}$$

↓

↓

次にひっくり返して和をとると

$$\begin{array}{r} \cancel{a-x-c} \quad 9 \quad 10-\cancel{a+c} \\ + \quad 10-\cancel{a+c} \quad 9 \quad \cancel{a-1-c} \\ \hline 10 \quad 8 \quad 9 \end{array}$$